Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

Soluţii şi bareme orientative pentru clasa a VII-a

Problema 1. Să se arate că pentru orice număr natural n, $n > 1$, numărul $\sqrt{11\ldots144\ldots4}$, unde 1 apare de n ori, iar 4 apare de $2n$ ori, este iraţional.

Soluţie.
Cerinţa revine la a arăta că numărul $11\ldots144\ldots4$ nu este pătrat perfect. .... 1 punct
Notând cu a numărul de n cifre $11\ldots1$, avem $11\ldots144\ldots4 = a \cdot 10^{2n} + 4a \cdot 10^n + 4a = a(10^n + 2)^2$. .... 4 puncte
Cum $a = 11\ldots1$ dă restul 3 la împărţirea cu 4, a nu este pătrat perfect. .... 1 punct
Rezultă că numărul $11\ldots144\ldots4$ nu este pătrat perfect. ...1pct

Problema 2. În triunghiul ABC avem $\angle ABC = 2 \cdot \angle ACB$. Să se arate că:
a) $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$;
b) $AB + BC < 2 \cdot AC$.

Soluţie.
a) Ducem bisectoarea BM a unghiului $\angle ABC$.
Din teorema bisectoarei obţinem $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC}$, de unde $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$, deci $AM = \frac{AB \cdot AC}{AB+BC}$. ....2 puncte
Deoarece $\angle ABM = \angle ACB$ rezultă $\Delta ABM \sim \Delta ACB$, de unde $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AB}$ adică $AM = \frac{AB^2}{AC}$. .... 1 punct
Obţinem $\frac{AB \cdot AC}{AB+BC} = \frac{AB^2}{AC}$ şi de aici concluzia. .... 1 punct
b) Fie P intersecţia paralelei din A la BM cu BC. Avem $\angle APM = \angle MBC = \angle ABM = \angle PAB = \angle C$, deci $AB = BP$ şi $AP = AC$. Atunci $AB + BC = PB + BC = PC < AP + AC = 2 \cdot AC$, ceea ce trebuia arătat. .... 3 puncte

Problema 3. O mulţime M de patru numere naturale se numeşte *legată*, dacă pentru orice element x din M cel puţin unul dintre numerele $x - 1$, $x + 1$ este în M. Fie U_n numărul de submulţimi *legate* ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.
a) Să se calculeze U_7;
b) Să se determine cel mai mic număr n pentru care $U_n \geq 2006$.

Soluţie. Fie $a < b < c < d$ elementele unei mulţimi legate M. Cum $a-1$ nu aparţine mulţimii, rezultă că $a+1 \in M$, deci $b = a+1$. Pe de altă parte, cum $d+1 \notin M$ deducem că $d-1 \in M$, deci $c = d-1$. Aşadar o mulţime legată este de forma $\{a, a+1, d-1, d\}$, cu $d-a > 2$.

.... 2 puncte

a) Sunt 10 submulţimi legate în mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:
$\{1, 2, 3, 4\}$;$\{1, 2, 4, 5\}$; $\{1, 2, 5, 6\}$; $\{1, 2, 6, 7\}$;
$\{2, 3, 4, 5\}$; $\{2, 3, 5, 6\}$; $\{2, 3, 6, 7\}$;
$\{3, 4, 5, 6\}$; $\{3, 4, 6, 7\}$ şi $\{4, 5, 6, 7\}$. .... 2 puncte

b) Fie $D = d-a+1$ *diametrul* mulţimii $\{a, b = a+1, c = d-1, d\}$. Avem $D > 3$ şi $D \leq n-1+1 = n$. Pentru $D = 4$ avem $n-3$ mulţimi legate, pentru $D = 5$ sunt $n-4$ mulţimi legate, şamd, iar pentru $D = n$ există 1 astfel de mulţime legată.

Sumând, avem $U_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$.

.... 2 puncte

Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $(n-3)(n-2) \geq 4012$. Cum $62 \cdot 63 \leq 4012 \leq 63 \cdot 64$, rezultă că $n-3 \geq 63$. Rezultă că cel mai mic număr ce respectă cerinţa este 66. .... 1 punct

Problema 4. Considerăm ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$. Fie D mijocul laturii BC, M mijocul segmentului AD şi N piciorul perpendicularei din D pe BM. Să se arate că $\angle ANC = 90^o$.

Soluţie.

Construim paralelogramul $ABDS$. Evident că $ADCS$ este dreptunghi şi fie R intersecţia diagonalelor sale.

.... 2 puncte

În triunghiul dreptunghic DNS segmentul NR este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $NR = \frac{1}{2} \cdot SD = \frac{1}{2} \cdot AC$.

.... 2 puncte

Cum R este mijlocul segmentului AC şi $NR = \frac{1}{2} \cdot AC$, deducem că triunghiul ANC este dreptunghic în N, ceea ce trebuia arătat.

.... 3 puncte